

Mi98.6 Tarea

Pacheco, Abril 12, 2002

Se permite el uso de cualquier tipo de literatura para resolver esta tarea. La tarea es grupal y se permite la comunicación verbal o escrita (relacionada con este cuestionario) con cualquier otra persona. Muestra tu trabajo; no se dará crédito a problemas cuyo trabajo no sea legible.

1. Da la respuesta a las siguientes preguntas sobre tensores métricos:

- (a) Sea $z^i = z^i(x^1, x^2, x^3)$, donde x^i son las coordenadas Cartesianas y z^i coordenadas curvilíneas. Muestre que la razón de volúmenes de elementos diferenciales en un espacio esta dado por $dV = JdV_0$ donde J es el Jacobiano

$$J = \frac{\partial(z^1, z^2, z^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}$$

de la transformación. Además $dV_0 = dx^1 dx^2 dx^3$ y $dV = dz^1 \cdot (dz^2 \times dz^3)$.

- (b) Para las coordenadas elípticas cilíndricas

$$\begin{aligned}y^1 &= \cosh x^1 \cos x^2 \\y^2 &= \sinh x^1 \sin x^2 \\y^3 &= x^3\end{aligned}$$

encuentre la matriz Jacobiana J y las componentes del tensor métrico g_{ij} .

- (c) Muestre usando notación indicial:

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u} &= 0 \\
\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \\
\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \\
\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \\
\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} \\
\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u})
\end{aligned}$$

(d) El radio vector está definido por $r = \sqrt{x_j x_j}$. Muestre lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{r} \\
\frac{\partial A(r)}{\partial x_j} &= \frac{\partial A(r)}{\partial r} \frac{x_j}{r} \\
\frac{\partial^2 A(r)}{\partial x_k \partial x_j} &= \delta_{jk} \frac{1}{r} \frac{\partial A(r)}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial A(r)}{\partial r} \right) \frac{x_j x_k}{r^2}
\end{aligned}$$

(e) Si ϵ_{ij} y τ_{ij} denotan las componentes de segundo orden de los tensores de deformación y esfuerzo respectivamente, ambos se relacionan para un medio anisotrópico mediante la ley $\tau_{ij} = c_{ijrs} \epsilon_{rs}$. Muestre que c_{ijrs} es un tensor de cuarto orden.

2. Si $|g| = \det g_{ij}$ (determinante del tensor métrico) demuestre que

(a)

$$\frac{\partial |g|}{\partial x^\mu} = |g| g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}$$

(b)

$$\frac{\partial \log |g|}{\partial x^\mu} = 2\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha$$

(c)

$$\frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha$$

3. Diferenciación covariante: Recuerda que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (v^j \mathbf{g}_j) = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \mathbf{g}_j + v^j \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j v^k \right) \mathbf{g}_j$$

que puede ser escrito como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = v^j_{,i} \mathbf{g}_j$$

en el que la derivada parcial *covariante* de las componentes contravariantes de un vector con respecto a x^i están definidas como

$$v^j_{,i} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j v^k$$

(a) De forma similar a lo hecho en clase, probar que

$$v_{j,i} = \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^k v_k$$

4. Los operadores diferenciales son:

Gradiente:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{g}^i$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{g}^i \cdot v^j \mathbf{g}_j = v^j_{,i} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = v^i_{,i}$$

Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{g}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \times v_j \mathbf{g}^j = \epsilon^{ijk} v_{k,j} \mathbf{g}_i$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 \phi = g^{ij} \phi_{,ij}$$

(a) Prueba que el Laplaciano de ϕ puede ser escrito como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right)$$

(b) Calcula $\nabla \phi$ en coordenadas cilíndricas y esféricas **usando los símbolos de Christoffel**.

- (c) Calcula $\nabla \cdot \mathbf{v}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas **usando los símbolos de Christoffel**.
- (d) Calcula $\nabla \times \mathbf{v}$ en coordenadas cilíndricas y esféricas **usando los símbolos de Christoffel**.
- (e) Calcula $\nabla^2 \phi$ en coordenadas cilíndricas y esféricas **usando los símbolos de Christoffel**.
5. Problemas de mecánica del medio continuo.

- (a) Escribe las ecuaciones de equilibrio en en coordenadas cilíndricas y esféricas.
- (b) Definimos la deformación infinitesimal mediante

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

donde $u_{i,j}$ es la derivada covariante de u_i . La ecuación de compatibilidad es

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0.$$

Demuestre o niegue que esto es equivalente a

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})$$

- (c) La deformación finita se define como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{\alpha,i} u_{\alpha,j}).$$

Usando el concepto de que las condiciones de compatibilidad deben de permanecer en el espacio Euclideo despues de la deformación, deriva dichas condiciones en coordenadas generalizadas. **Nota:** Esta condición se puede derivar facilmente si se utilizan coordenadas convectivas o intrinsecas (para deformaciones grandes). Usando el hecho de que el espacio del cuerpo deformado es Euclideo, deriva las condiciones de compatibilidad. Nota, sin embargo, que las propiedades de la derivada covariante del tensor métrico es igual a cero tanto en el espacio de Riemann como en el Euclideo. La característica que distingue un espacio Euclideo es la anulación

del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel R_{pst}^i . Si se expresa $R_{pst}^i = 0$ en función de los tensores métricos antes y después de la deformación, obtendrán las condiciones de compatibilidad. Vean *Theoretical Elasticity* Green y Zerna.

6. De los ejercicios **2.4** de los apuntes, resuelvan: 23, 24, 26, 29, 30, 43, 44, 46, 47 y 50.
7. De los ejercicios **2.5** de los apuntes, resuelvan: 9, 13, 21, 26, 27, 32 y 33.