Formes quadratiques. Applications.

Par Nicolas Lanchier [1]

1 Formes quadratiques. Généralités.

Définition 1.1 — Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$ et E un K-espace vectoriel. On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \longrightarrow K$ de la forme $q(x) = f(x, x)$ où f est une forme bilinéaire sur E. [1], Sect. 5.1

Proposition 1.2 — Etant donnée q une forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique f sur E telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = f(x, x)$. La forme bilinéaire f, est donnée par

$$f(x, y) \ = \ \frac{1}{4} \ (\, q(x + y) - q(x - y)\,)$$

est appelée forme polaire de q. [1], Sect. 5.1

Définition 1.3 — Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire f. Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $q(x) = 0$. [1], Sect. 5.1

Définition 1.4 — Un sous-espace $F \subset E$ est dit totalement isotrope si tous ses éléments sont isotropes. Si F est un sous-espace totalement isotrope maximal au sens de l'inclusion, alors F est appelé sous-espace totalement isotrope maximal. [1], Sect. 5.1

Définition 1.5 — Le noyau de q est le sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Ker}\, q$, défini par

$$\mathrm{Ker}\, q \ = \ \{\, x \in E \,,\ f(x, y) = 0 \quad \forall\ y \in E\, \}$$

La forme quadratique q est dite dégénérée si $\mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$, non dégénérée dans le cas contraire.

Théorème 1.6 — Si q est non dégénérée, tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux de E ont même dimension n. L'entier n est appelé indice de q. [1], Sect. 5.1

2 Classification des formes quadratiques.

Théorème 2.1 — Si E est de dimension finie, il existe une base orthogonale de E.

Corollaire 2.2 — Soit $A \in M_n(K)$ telle que $A^* = A$. Il existe une matrice inversible P telle $P^* \cdot A \cdot P$ soit une matrice orthogonale. [1], Sect. 5.1

Théorème 2.3 (méthode de Gauss) — Toute forme quadratique q s'écrit comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. [1], Sect. 5.1

Théorème 2.4 (Sylvester) — Soit q une forme quadratique et notons

$$q(x) \ = \ |g_1(x)|^2 \ + \ \cdots \ + \ |g_k(x)|^2 \ - \ |g_{k+1}(x)|^2 \ - \ \cdots \ - \ |g_{k+n}(x)|^2$$

la décomposition donnée par la méthode de Gauss. Alors le couple (k, n), appelé signature de q, ne dépend pas du choix de la décomposition. De plus, le rang de q est égal à $k + n$.

Définition 2.5 — Une forme quadratique q est définie si pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, $q(x) \neq 0$. [1], Sect. 5.1

PROPOSITION 2.6 — Une forme quadratique positive q est définie si et seulement si elle est non dégénérée. [1], Sect. 5.1

THÉORÈME 2.7 — Soient $K = F_p$ un corps fini de caractéristique $\neq 2$, E un K-espace vectoriel de dimension n et $\lambda \in K^*$ n'admettant pas de racine carrée dans K. Il existe deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur E, de matrices

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Une forme quadratique q est de l'un ou l'autre type selon que son discriminant est ou non un carré de K^*. [3], Sect. 5.6

3 Exemples d'application.

THÉORÈME 3.1 — Soient E un espace euclidien, et f un endomorphisme autoadjoint sur E. Alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f. [1], Sect. 5.1

THÉORÈME 3.2 — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 telle que $df(a) = 0$. On note A la matrice hessienne de f en a, et q la forme quadratique associée.

1. Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a alors q est une forme quadratique positive (resp. négative).
2. Si q est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

[1], Sect. 5.1

THÉORÈME 3.3 (LEMME DE MORSE) — Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, nulle en 0 et telle que $df(0) = 0$. Si la matrice hessienne de f en 0 est inversible alors il existe un C^∞-difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ défini sur un voisinage W de 0 et un entier r tels que pour tout $x \in W$,

$$f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + \cdots + [\varphi_r(x)]^2 - [\varphi_{r+1}(x)]^2 - \cdots - [\varphi_n(x)]^2$$

[2], Sect. 5.5

THÉORÈME 3.4 (OSTROWSKI-REICH) — Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne positive que l'on décompose en $A = D - E - F$ où D est une matrice diagonale, E une matrice triangulaire inférieure stricte, et F une matrice triangulaire supérieure stricte. La méthode de relaxation pour la résolution de $A \cdot x = b$ s'écrit

$$(D - \omega E)\, u_{n+1} = [(1-\omega)\, D + \omega F]\, u_n + \omega b$$

La méthode est dite convergente si pour tout $u_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout b, la suite u_n, $n \geq 0$, converge vers la solution de $A \cdot x = b$. La méthode de relaxation converge si et seulement si $\omega \in]0, 1[$.

Références

[1] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre.* Ellipses, 1994.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses, 1994.

[3] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.