

Radon 变换反演的误差分析*

郭洪斌 区锐森

(基础课教学部)

摘要 本文对 Radon 变换反演的误差进行了两方面的讨论. 首先, 分析了测量误差对反演误差的影响, 给出了控制不等式, 明确了度量误差的恰当范数(sobolev 范数). 其次, 就反演的基本方法—Fourier 反演法进行了分析, 给出了具体的误差控制式.

关键词 Radon 变换; sobolev 空间

中图分类号 O177.92

记号: $\Omega-R^n$ 中的开子集

$\&$ —速降函数空间

$H^\alpha(\Omega)$ — α 阶 sobolev 空间

S^n — n 维单位球面

Radon 变换的反演在地球物理勘探, 医疗, 辐射等领域都有广泛的应用, 现在已有的许多反演算法, 都有一个共同的缺陷—没有对误差进行定量分析. 本文在这方面进行了初步的探索.

1 测量误差对反演结果的影响

首先我们引进一些记号:

$$(t, \bar{\theta}) \in R^1 \times S^{n-1}, x \in R^n$$

$$Rf(t, \bar{\theta}) = \int_{x \cdot \bar{\theta} = 1} f(x) ds = \int_{R^n} f(x) \delta(t - x \cdot \bar{\theta}) dx$$

$Rf(t, \bar{\theta})$ 称为 $f(x)$ 的 Radon 变换, 若以 $\tilde{f}(\xi)$ 记 $f(x)$ 的 Fourier 变换

$$\tilde{f}(\xi) = Ff(\xi) \equiv \int_{R^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

$$\tilde{R}f(\xi, \bar{\theta}) \equiv \int_R Rf(t, \bar{\theta}) e^{-it\xi} dt$$

则有

$$\tilde{R}f(\xi, \bar{\theta}) = \tilde{f}(\xi \bar{\theta})$$

Sobolev 空间:

$$H^\alpha(\Omega) \equiv \{ u | u \in \&'(\Omega), (1 + |\xi|)^{\alpha/2} \cdot \tilde{u}(\xi) \in L^2(R^n) \}$$

$$H^\alpha(R^1 \times S^{n-1}) \equiv \{ g(t, \bar{\theta}) | g(t, \bar{\theta}) \in \&'(R^1), (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} \cdot \tilde{g}(\xi, \bar{\theta}) \in L^2(R^1 \times S^{n-1}) \}$$

* 1993 年 10 月 4 日收到.

郭洪斌 理学硕士, 上海电子计算机厂, 上海市南京西路 1486 号(200040). 区锐森 副教授, 上海工业大学数学教研室, 上海市延长路 149 号(200072).

$$\|g(t, \bar{\theta})\|_{H^n(R \times S^{n-1})}^2 \equiv (2\pi)^{-n} \int_{|\bar{\theta}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|^2)^\alpha |\tilde{g}(\xi, \bar{\theta})|^2 d\xi d\theta$$

定理 1 假设

$$\alpha \geq 0, \Omega \equiv \{x \in R^n \mid |x| < 1\}$$

(1) $R: f \rightarrow Rf$ 是 $H^\alpha(\Omega) \rightarrow H^{\alpha+\frac{1}{2}}(R' \times S^{n-1})$ 的映射.

$R^{-1}: Rf \rightarrow f$ 是 $H^{\alpha+\frac{1}{2}}(R' \times S^{n-1}) \rightarrow H^\alpha(R^n)$ 的映射.

(2) R, R^{-1} 都是有界算子, 存在常数 C , 使 $\forall f \in H^\alpha(\Omega)$ 成立不等式

$$\sqrt{2} \|f\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq \|Rf\|_{H^{\alpha+\frac{1}{2}}(R' \times S^{n-1})} \leq C \cdot \|f\|_{H^\alpha(\Omega)}$$

证明: Radon 变换的可逆性是熟知的. 我们只须证结论(2), 结论(1)是它的简单推论.

先证左式:

$$\begin{aligned} 2\|f\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 &= 2(2\pi)^{-n} \int_{R^n} (1+|\eta|^2)^\alpha \cdot |\tilde{f}(\eta)|^2 d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{|\bar{\theta}|=1} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\rho|^2)^\alpha \cdot |\tilde{f}(\rho\bar{\theta})|^2 \cdot |\rho| d\rho d\theta \\ &\leq \|Rf\|_{H^{\alpha+\frac{1}{2}}(R' \times S^{n-1})}^2 \end{aligned}$$

再证右式:

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{H^{\alpha+\frac{1}{2}}(R' \times S^{n-1})}^2 &= (2\pi)^{-n} \int_{|\eta| \geq 1} |\eta|^{-1} (1+|\eta|^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot |f(\eta)|^2 d\eta \\ &\quad + (2\pi)^{-n} \int_{|\eta| \leq 1} |\eta|^{-1} (1+|\eta|^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot |f(\eta)|^2 d\eta \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$I_1 \equiv (2\pi)^{-n} \int_{|\eta| \geq 1} |\eta|^{-1} \cdot (1+|\eta|^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot |f(\eta)|^2 d\eta \leq \sqrt{2} \cdot \|f\|_{H^\alpha(\Omega)}^2$$

$$I_2 \equiv (2\pi)^{-n} \int_{|\eta| \leq 1} |\eta|^{-1} \cdot (1+|\eta|^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot |f(\eta)|^2 d\eta$$

$$\leq (2\pi)^{-n} \int_{|\eta| \leq 1} |\eta|^{-1} \cdot (1+|\eta|^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} d\eta \cdot \sup_{|\eta| \leq 1} |f(\eta)|^2$$

$$= C_1 \cdot \sup_{|\eta| \leq 1} |f(\eta)|^2$$

$$(\because n \geq 2 \quad \therefore \int_{|\eta| \leq 1} |\eta|^{-1} (1+|\eta|^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} d\eta \text{ 收敛})$$

作截断函数

$$\varphi(x) \in C^\infty(R^n)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \in R^n \setminus \Omega_e \end{cases}$$

则

$$|\tilde{f}(\eta)| = \left| \int_{R^n} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot e^{-ix\eta} dx \right| = \left| \int_{R^n} f(x) \cdot \Psi(x, \eta) dx \right|$$

$$\leq (2\pi)^{-n} \int_{R^n} |\tilde{f}(\xi) \cdot \tilde{\Psi}(\xi, \eta)| d\xi$$

$$\leq (2\pi)^{-n} \cdot \|f\|_{H^\alpha(\Omega)} \left(\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-\alpha} |\tilde{\Psi}(\xi, \eta)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

易证 $\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-\alpha} |\tilde{\Psi}(\xi, \eta)|^2 d\xi$ 连续, 以 C_2 记其在 $|\eta| \leq 1$ 上的最大值.

令 $C^2 = \sqrt{2} + (2\pi)^{-2n} C_1 C_2$ 则有 $\|Rf\|_{H^{n+\frac{1}{2}}(R^n \times S^{n-1})}^2 \leq C^2 \|f\|_{H^n(\Omega)}^2$.
证毕.

我们为什么要取 sobolev 范数来度量呢? 是否有其它更简单, 实际意义更明显的度量范数? 譬如 L^2 范数. 我们下面举一反例说明, 不存在常数 M , 使下式成立:

$$\|f\|_{L^2} \leq M \cdot \|Rf\|_{L^2}$$

即在 $\|\cdot\|_{L^2}$ 意义下, Radon 变换反演问题是不适定的.

考察函数

$$f_n(x, y) = \begin{cases} \cos(n\sqrt{x^2 + y^2}) & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

有
$$Rf_n(t, \theta) = 2 \int_t^1 \cos(np) \frac{p}{\sqrt{p^2 - t^2}} dp$$

由 Riemann—Lebesgue 引理 $\forall t \in [0, 1] \lim_{n \rightarrow \infty} Rf_n(t) = 0$ 运用 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Rf_n\|_{L^2} = 0$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2}^2 = \frac{\pi}{2}$ 故上述 M 不存在. 从定理 1 可知, 当以 $\|\cdot\|_{L^2}$ 度量 f 时, 以 $\|\cdot\|_{H^{1/2}}$ 度量 Rf 是合适的. 因为

$$\sqrt{2} \|f\|_{L^2} \leq \|Rf\|_{H^{1/2}}$$

2 Fourier 反演法算法上的误差

这里不考虑测量误差及计算机字长有限而引起的误差. 以 Radon 变换反演的基本方法—Fourier 反演法为例, 讨论两维情况下的反演误差.

Fourier 反演法的基本原理是根据 Radon 变换与 Fourier 变换的关系式:

$$\tilde{R}f(\omega, \bar{\theta}) = \tilde{f}(\omega, \bar{\theta})$$

这里 Fourier 反演法分以下三步完成:

$$\{Rf(t_i, \theta_j)\}_{ij} \xrightarrow{(1)} \{\tilde{R}f(\omega, \bar{\theta}_j) = \tilde{f}(\omega \bar{\theta}_j)\}_j$$

$$\{\tilde{f}(\omega \bar{\theta}_j)\}_j \xrightarrow{(2)} \{\tilde{f}(\omega_{1k}, \omega_{2l})\}_{k,l}$$

$$\{\tilde{f}(\omega_{1k}, \omega_{2l})\}_{k,l} \xrightarrow{(3)} f(x, y)$$

第一步 对离散采样 $Rf(t_i, \theta_j)$ 关于 t 作 Fourier 变换. $Rf(t, \theta)$ 有紧支集, 关于 t 的采样率取多大合适? 误差怎样?

第二步 已知 $\tilde{f}(\omega \bar{\theta}_j)$ 作直角坐标下插值函数 $S(w_1, w_2)$, 共插值按就近原则进行, 即函数 $S(w_1, w_2)$ 的值取离点 (w_1, w_2) 最近的已知点的函数值.

第三步 由 $\tilde{f}(w_{1k}, w_{2l})$ 反演求 $f(x, y)$.

定理 2 若 $f(x) \in \mathcal{E}'(R')$, h 为关于 x 的采样间隔. 则

$$\tilde{f}(w) - h \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)e^{-inhw} = - \sum_{l \neq 0} \tilde{f}(w - \frac{2\pi}{h}l)$$

只须把欲证等式改写为

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w - \frac{2\pi}{h}l) = h \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)e^{-inhw}$$

再将左式展开成 Fourier 级数, 即得右式.

下面我们把它推广到 n 维, 在此之前, 对有关变量说明如下:

时域变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

频域变量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

格子点 $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$

定理 3 若 $f(x) \in \mathcal{E}(R^n)$. 关于 x_i 的采样间隔为 $h_i, i = 1, 2, \dots, n$. 记 $x_m = (m_1 h_1, m_2 h_2, \dots, m_n h_n)$, 则

$$\tilde{f}(w) - h_1 h_2 \dots h_n \sum_m f(x_m) e^{-ix_m w} = - \sum_{l \neq (0, 0, \dots, 0)} \tilde{f}(w_1 - \frac{2\pi}{h_1} l_1, \dots, w_n - \frac{2\pi}{h_n} l_n)$$

定理 4 若 $g(w) \in \mathcal{E}(R^n)$, $g(w)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 变换, 关于 w_i 作间隔为 h_i 的采样, $i = 1, 2, \dots$. 记 $w_m = (m_1 h_1, \dots, m_n h_n)$. 则

$$f(x) - (2\pi)^{-n} \cdot h_1 h_2 \dots h_n \sum_m g(w_m) e^{i w_m x} = - \sum_{l \neq (0, 0, \dots, 0)} f(x_1 - \frac{2\pi}{h_1} l_1, x_2 - \frac{2\pi}{h_2} l_2, \dots, x_n - \frac{2\pi}{h_n} l_n)$$

定理 3, 定理 4 的证明类似定理 2, 在此从略.

在以下的讨论中, 假设

(1) $\text{supp} f \subset \Omega$ 于是 $\tilde{R}f(w, \theta) \in \mathcal{E}(R^1), \forall \theta \in [0, \pi)$

(2) 给定较小的数 $\varepsilon > 0$, 取适当的 $b > 0$, 使 $\sum_{l \neq 0} \|\tilde{R}f(w)\|_{L^2(I_l, |\omega|)} < \varepsilon \quad \forall \theta$ 成立.

其中 $I_l \equiv [-(2l+1)b, -(2l-1)b]$.

由于 $\tilde{f}(w_1, w_2) \in \mathcal{E}(R^2) \Rightarrow \tilde{R}f(w, \theta) \in \mathcal{E}(R^1), \forall \theta$ 所以假设(2)是合理的. 即这样的 b 是存在的.

分析反演的第一步.

对 $Rf(t, \theta)$ 采样时, 对于每个 θ_j 关于 t 的采样间隔取值 $h = \frac{\pi}{b}$, 以

$$\tilde{R}f_1(w, \theta_j) = \begin{cases} h \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} Rf(nh, \theta_j) e^{-inhw} & |w| \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

近似 $\tilde{R}f(w, \theta_j)$, 由定理 2. $|\omega| \leq b$ 时的误差为:

$$E(w, \theta_j) = - \sum_{l \neq 0} \tilde{R}f(w - \frac{2\pi}{h}l, \theta_j), \quad |w| \leq b$$

显然, $(\int_{-b}^b |E(w, \theta_j)|^2 \cdot |w|dw)^{\frac{1}{2}} \geq \varepsilon$, 故 $\|\tilde{R}f_1(w, \theta_j) - \tilde{R}f(w, \theta_j)\|_{L^2(R_2^1 w)} \leq \sqrt{2}\varepsilon$

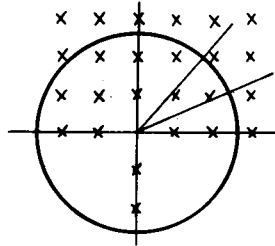


图1 采样点示意图

分析反演的第二步:

由于 $\text{supp} f \subset \Omega$ 根据定理 2(shannon), 为了反演的需要, 只须在频域 (w_1, w_2) 上关于 w_1, w_2 都作间隔为 π 的取样即可. 即已知 $\tilde{f}_1(w, \bar{\theta}_j), j=1, \dots, N$ 求间距为 π 的格子点 (w_k, w_{2l}) 上的 $\tilde{f}_1(w_k, w_{2l})$ 见示意图 1, 按就近原则用插值函数 $S(w_1, w_2)$ 来近似 $\tilde{f}(w_1, w_2)$.

$$S(p) = S(w_{1k}, w_{2l}) = \tilde{f}_1(\theta)$$

$$\begin{aligned} |S(p) - \tilde{f}_1(p)| &= |\tilde{f}_1(\theta) - \tilde{f}_1(p)| \\ &\leq |\text{Re}(\tilde{f}_1(\theta) - \tilde{f}_1(p))| + |\text{Im}(\tilde{f}_1(\theta) - \tilde{f}_1(p))| \\ &\leq M_1 \cdot \frac{|\Delta\theta|}{2} + M_2 \cdot 2b \sin^2 \frac{\Delta\theta}{4} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{(w, \theta) \in [-b, b] \times (0, \pi)} \left[\left| \frac{\partial(\text{Re}\tilde{f}_1)}{\partial\theta} \right| + \left| \frac{\partial(\text{Im}\tilde{f}_1)}{\partial\theta} \right| \right] \\ M_2 &= \max_{(w, \theta) \in [-b, b] \times (0, \pi)} \left(\left| \frac{\partial(\text{Re}\tilde{f}_1)}{\partial w} \right| + \left| \frac{\partial(\text{Im}\tilde{f}_1)}{\partial w} \right| \right) \end{aligned}$$

我们有:

$$\|S(w_1, w_2) - \tilde{R}f_1(w, \theta)\|_{L^2} \leq \sqrt{\pi} b \left(\frac{|\Delta\theta|}{2} M_1 + 2b \sin^2 \frac{\Delta\theta}{4} \cdot M_2 \right)$$

再注意:

$$\|\tilde{R}f_1 - \tilde{R}f\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

记:

$$g(w_1, w_2) \equiv S(w_1, w_2) - \tilde{f}(w_1, w_2)$$

$$\eta \equiv \sqrt{\pi} b \left(\frac{\Delta\theta}{2} \cdot M_1 + 2b \sin^2 \frac{\Delta\theta}{4} \cdot M_2 \right) + \sqrt{2\pi}\varepsilon$$

则

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(R^2)} &\leq \|S - \tilde{R}f_1\|_{L^2} + \|\tilde{R}f_1 - \tilde{R}f\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{\pi} b \left(\frac{\Delta\theta}{2} M_1 + 2b \sin^2 \frac{\Delta\theta}{4} \cdot M_2 \right) + \sqrt{2\pi}\varepsilon = \eta \end{aligned}$$

分析反演的第三步:

对 $S(w_1, w_2)$ 作 Fourier 反演, 近似求 $f(x, y)$, 由定理 4 可知

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{mn} \tilde{f}(m\pi, n\pi) e^{in}(mx + ny), (x, y \in \Omega)$$

作近似函数

$$f'(x, y) \equiv \frac{1}{4} \sum_{mn} S(m\pi, n\pi) e^{in}(mx + ny), (x, y) \in \Omega$$

则:

$$f \approx f' = \frac{1}{4} \sum_{mn} g(m\pi, n\pi) e^{in}(mx + ny) \approx F^{-1}g(x, y)$$

故

$$\|f' - f\|_{L^2} \approx \|F^{-1}g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2} \leq \eta$$

最后, 我们可以对测量误差和计算误差作综合考虑, 只须取 $d=0$, 进行迭加.

参 考 文 献

- 1 Papoulis, A. The Fourier integral and its applications. *MCGRM-HILL Book COMPANY, INC* 1962
- 2 Ludwig, D. The Radon transform on Euclidean spaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 191966: 49-81
- 3 Quinto, E.T. Tomographic reconstructions form incomplete.data numerical inversion of the exterior Radon transform. *Inverse Problem*. 4 1988: 867-876
- 4 Beylkin, G. The inversion problem and application of the generalized Radontransform. *Comm. Pure & Applied Math.* 37 1984: 579-599
- 5 齐民友. 线性偏微分算子引论(上册). 北京, 科学出版社, 1986:76-170

ERROR ANALYSIS OF INVERSE RADON TRANSFORM

Guo Hongbin (*Shanghai Computer Factory*)

Ou Ruisen (*Drpt. of Fundamental Courses*)

(Received October 3, 1993)

Abstract

Inverse Radon transform is widely used in geophysical prospecting. Picture rebuilding and so on. There are a lot of algorithms for the inverse Radon transform now. But almost none of these algorithms have well analysed the error. This paper makes a study on the error.

On one hand, we have analysed the relation between measure error and inverse error and made clear the errors tolerance norm (sobolev norm), On the other hand, we have concluded relation among algorithm error. Fourier transforms. derivative and sample rate.

Key words Radon transform; sobolev space

回空

个空

雷断

空

空 (5)

空